ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione suppletiva

PROBLEMA 2

Nel Liceo Scientifico «Torricelli» vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sezione / sesso	A	B	C	D
M	12	10	13	8
F	16	18	15	20

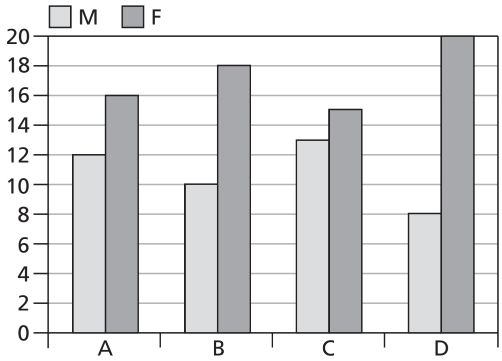
a) Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.
b) Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.
c) Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5ª A, questa sia formata da alunni di sesso:

1) maschile 2) femminile 3) differente.

Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?.
d) Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.
e) Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5ª D.

PROBLEMA 2

a) In figura 5 è riportato l'istogramma che rappresenta la suddivisione degli alunni per sesso in ciascuna delle quattro classi quinte considerate.



▲ **Figura 5.**

b) Nell'insieme S degli studenti delle classi quinte del L. S. «Torricelli» consideriamo le due variabili casuali del problema:

– *sesso* (X), i cui valori sono M ed F;
– *sezione* (Y), i cui valori sono A, B, C, D.

Rappresentiamo le corrispondenti distribuzioni di probabilità:

X	M	F
$P(X)$	$\frac{43}{112}$	$\frac{69}{112}$

Y	A	B	C	D
$P(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Compiliamo la tabella a doppia entrata delle probabilità congiunte, ossia le probabilità delle coppie ordinate (*sesso*, *sezione*) dei possibili valori delle due variabili. Per calcolare la probabilità che uno studente abbia un dato sesso e frequenti una data sezione possiamo utilizzare una delle seguenti formule:

$$(\textit{prob. di app. a una sez. data}) \times \frac{\textit{num. stud. della sez. aventi un dato sesso}}{\textit{num. stud. della sez.}};$$

$$(\textit{prob. di app. a un sesso dato}) \times \frac{\textit{num. stud. di quel sesso iscritti ad una sez. data}}{\textit{num. tot. degli stud. di quel sesso}}.$$

X \ Y	A	B	C	D	somma
M	$\frac{1}{4} \times \frac{12}{28} = \frac{3}{28}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{13}{112}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{43}{112}$
F	$\frac{69}{112} \times \frac{16}{69} = \frac{1}{7}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{15}{112}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{69}{112}$
somma	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

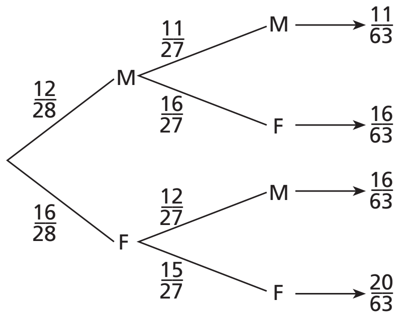
Le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso sono date rispettivamente dalle somme per colonne e dalle somme per righe. Dalla tabella possiamo constatare che:

– le probabilità *marginali* delle due variabili coincidono con le probabilità delle *singole* variabili ma
– le probabilità congiunte non sono uguali al prodotto delle probabilità marginali.

Per quest'ultima ragione le due variabili sono dipendenti.

c) Per calcolare la probabilità di ciascun tipo di coppia di eventi, si utilizza il teorema della probabilità composta tenendo conto che i due eventi che formano l'evento composto sono stocasticamente dipendenti. Il procedimento adottato è schematizzato dal diagramma ad albero riportato in figura 6, in cui M ed F sono gli eventi «L'alunno è maschio», «L'alunno è femmina» rispettivamente.
La probabilità che, in 5ª A, il primo studente scelto sia un maschio è $\frac{12}{28}$, mentre la probabilità che anche il secondo lo sia è $\frac{11}{27}$. Quindi $P(M \cap M) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} = \frac{11}{63}$. Analogamente la probabilità di scegliere una coppia di studenti di sesso femminile è $P(F \cap F) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} = \frac{20}{63}$. La probabilità di scegliere una coppia di studenti di sesso differente è la somma logica di due eventi incompatibili, quindi: $P((M \cap F) \cup (F \cap M)) = \frac{16}{63} + \frac{16}{63} = \frac{32}{63}$. Le probabilità richieste dal quesito sono $\frac{11}{63}$, $\frac{20}{63}$ e $\frac{32}{63}$ rispettivamente. La somma delle 3 probabilità trovate è 1.

▼ **Figura 6.**



d) La probabilità E che la coppia scelta sia formata da un maschio e una femmina è la somma logica di quattro eventi composti a due a due incompatibili, infatti:

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C) + P(E \cap D);$$

quindi:

$$P(E) = P(A) \cdot P(E|A) + P(B) \cdot P(E|B) + P(C) \cdot P(E|C) + P(D) \cdot P(E|D)$$

e $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}$.

Sappiamo dal punto c) che $P(E|A) = \frac{32}{63}$. Con un procedimento analogo a quello utilizzato nel punto c) otteniamo:

$$P(E|B) = \frac{10}{28} \cdot \frac{18}{27} + \frac{18}{28} \cdot \frac{10}{27} = \frac{180}{378},$$

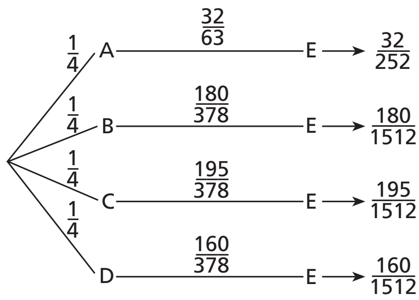
$$P(E|C) = \frac{13}{28} \cdot \frac{15}{27} + \frac{15}{28} \cdot \frac{13}{27} = \frac{195}{378},$$

$$P(E|D) = \frac{8}{28} \cdot \frac{20}{27} + \frac{20}{28} \cdot \frac{8}{27} = \frac{160}{378},$$

Infine per il calcolo di $P(E)$ utilizziamo il diagramma ad albero di figura 7.

Pertanto $P(E) = \frac{192 + 180 + 195 + 160}{1512} = \frac{727}{1512} \simeq 0{,}48$

e) I maschi sono in tutto 43 e di questi 8 frequentano la 5ª D. La probabilità che uno studente maschio scelto fra le classi quinte provenga dalla 5ª D è pari a $\frac{8}{43}$.



▲ **Figura 7.**