9 Dimostrare la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

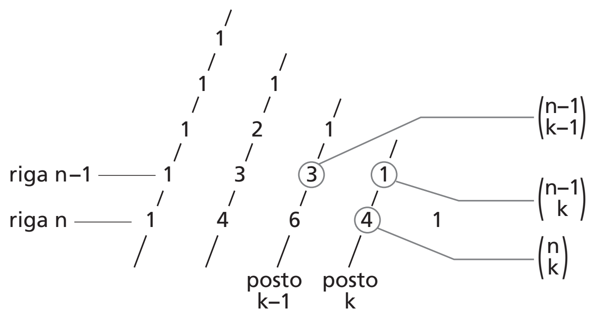
dove n, k sono numeri naturali tali che $0 < k < n$. Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del «triangolo di Tartaglia» (da Niccolò Fontana, detto Tartaglia, 1505 ca. - 1557): enunciarla.

9 Si tratta della formula di Stifel dei coefficienti binomiali. Tale espressione, assunta come vera, può essere verificata membro a membro utilizzando la legge dei tre fattoriali $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Diversamente, essa si dimostra facendo riferimento al significato di $\binom{n}{k}$ come il numero delle combinazioni di classe k i cui elementi sono scelti da un insieme A di n elementi distinti. Indicato con a un elemento di A, le combinazioni di classe k che contengono l'elemento a sono quelle combinazioni di $n-1$ elementi di classe $k-1$, a cui si aggiunge l'elemento a stesso. Il numero di questi sottoinsiemi è $\binom{n-1}{k-1}$.

Le combinazioni di classe k che non contengono l'elemento a sono invece $\binom{n-1}{k}$. Pertanto, sommando le combinazioni che contengono a con quelle che non lo contengono, si ottiene il numero complessivo delle combinazioni di n elementi di classe k cioè:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Sulla formula di Stifel è basato il metodo ricorsivo per la costruzione del triangolo di Tartaglia, necessario a determinare i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio secondo la formula di Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Nel triangolo di Tartaglia i lati obliqui del triangolo sono formati da tanti 1, mentre ogni coefficiente interno si ottiene come somma dei due coefficienti della riga precedente che sono alla sua destra e alla sua sinistra.



▲ **Figura 9.**

