5 Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5 Lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio si può ottenere con la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n} b^n.$$

La somma dei coefficienti dello sviluppo della potenza n-esima del binomio si ottiene ponendo $a=1$ e $b=1$:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Si ha quindi:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

